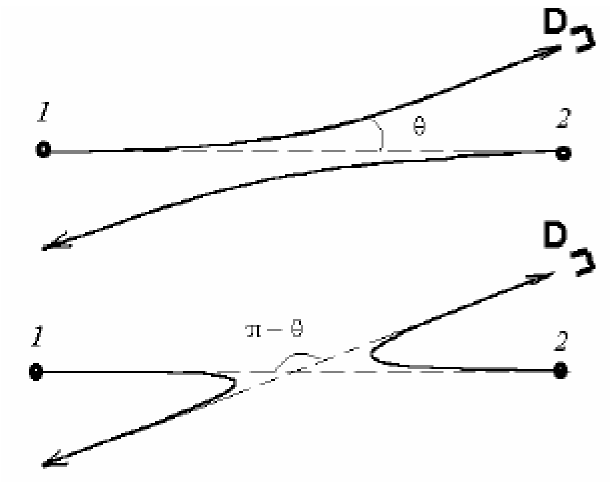
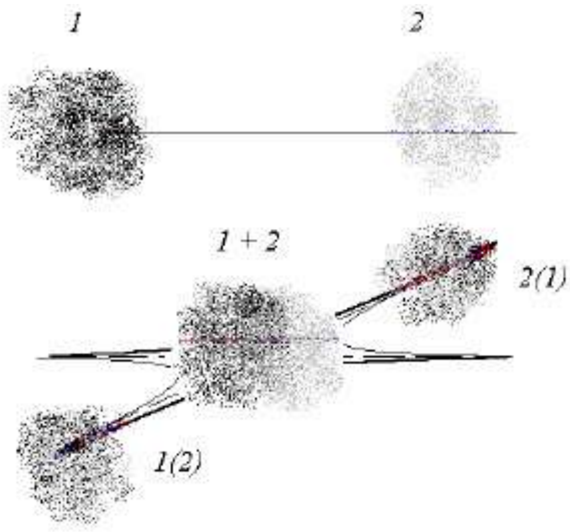
Тождественность квантовых частиц





Рассеяние классических частиц

Рассеяние квантовых частиц

Для квантовых систем тождественных частиц допустимы лишь симметричные или антисимметричные волновые функции

Оператор перестановки частиц

$$\hat{P}\psi(x_1, x_2) = P\psi(x_2, x_1)$$

$$\hat{P}^2\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)$$

$$P = \pm 1$$

$$\Rightarrow$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \psi_S(x_2, x_1)$$

$$\psi_A(x_1, x_2) = -\psi_A(x_2, x_1)$$

Квантовое описание системы многих частиц

$$\hat{H}\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2)$$

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + U(x_1, x_2)$$

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\ 2}} + U(x_1)$$

$$\hat{H}_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\ 2}} + U(x_2)$$

$$U(x_1, x_2)$$

энергия взаимодействия

Невзаимодействующие частицы

$$U(x_1, x_2) = 0$$

$$\psi(x_1, x_2) = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)$$

$$\psi(x_2, x_1) = \psi_a(x_2)\psi_b(x_1) \neq \psi(x_1, x_2)$$

$$\psi_S(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right\}$$

Бозоны S=0, 1, 2… фотон, пионы, ${}_2^4$He…

$$\psi_A(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\right\}$$

Фермионы S=1/2, 3/2,… e, p, n, ${}_2^3$He…

Следствия неразличимости квантовых частиц. Обменное взаимодействие.

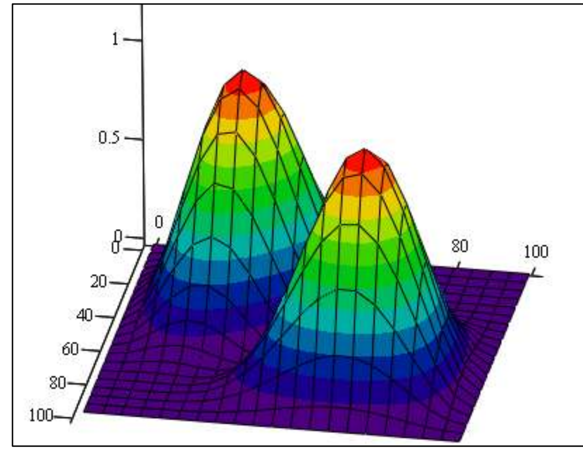
$n1 := 1 \quad n2 := 2 \quad a := 100 \quad x1 := 1..100 \quad x2 := 1..100$

$$\psi s(x1,x2) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(n1\cdot\pi\cdot\frac{x1}{a}\right)\cdot\sin\left(n2\cdot\pi\cdot\frac{x2}{a}\right) + \sin\left(n2\cdot\pi\cdot\frac{x1}{a}\right)\cdot\sin\left(n1\cdot\pi\cdot\frac{x2}{a}\right)\right)$$

$$\psi a(x1,x2) := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(n1\cdot\pi\cdot\frac{x1}{a}\right)\cdot\sin\left(n2\cdot\pi\cdot\frac{x2}{a}\right) - \sin\left(n2\cdot\pi\cdot\frac{x1}{a}\right)\cdot\sin\left(n1\cdot\pi\cdot\frac{x2}{a}\right)\right)$$

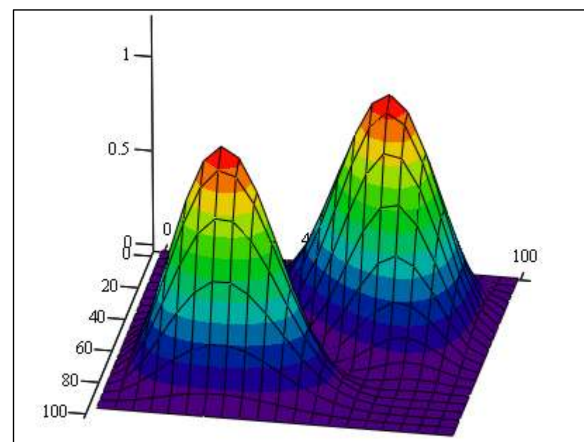
$$\psi s2(x1,x2) := (\psi s(x1,x2))^2 \qquad \psi a2(x1,x2) := (\psi a(x1,x2))^2$$

Бозоны (симметричная волновая функция) – тенденция к объединению.
Плотность вероятности максимальна, когда частицы находятся рядом.



$\psi s2$

фермионы
(антисимметричная волновая функция) - тенденция к разъединению.
Плотность вероятности максимальна, когда частицы удалены друг от друга. Вероятность найти частицы в одной и той же области равна нулю – принцип запрета Паули.



$\psi a2$

Фундаментальные взаимодействия

Properties of the Interactions

The strengths of the interactions (forces) are shown relative to the strength of the electromagnetic force for two u quarks separated by the specified distances.

Property	Gravitational Interaction	Weak Interaction (Electroweak)	Electromagnetic Interaction	Strong Interaction
Acts on:	Mass – Energy	Flavor	Electric Charge	Color Charge
Particles experiencing:	All	Quarks, Leptons	Electrically Charged	Quarks, Gluons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	W^+ W^- Z^0	γ	Gluons
Strength at 10^{-18} m	10^{-41}	0.8	1	25
Strength at 3×10^{-17} m	10^{-41}	10^{-4}	1	60

Бозоны

BOSONS force carriers spin = 0, 1, 2, …

Unified Electroweak spin = 1

Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
γ photon	0	0
W^-	80.39	–1
W^+ W bosons	80.39	+1
Z^0 Z boson	91.188	0

Strong (color) spin =1

Name	Mass GeV/c^2	Electric charge
g gluon	0	0

Фермионы

FERMIONS matter constituents
spin = 1/2, 3/2, 5/2, ...

Leptons spin =1/2

Flavor		Mass GeV/c^2	Electric charge
ν_L	lightest neutrino*	$(0-0.13)\times10^{-9}$	0
e	electron	0.000511	−1
ν_M	middle neutrino*	$(0.009-0.13)\times10^{-9}$	0
μ	muon	0.106	−1
ν_H	heaviest neutrino*	$(0.04-0.14)\times10^{-9}$	0
τ	tau	1.777	−1

Quarks spin =1/2

Flavor		Approx. Mass GeV/c^2	Electric charge
u	up	0.002	2/3
d	down	0.005	−1/3
c	charm	1.3	2/3
s	strange	0.1	−1/3
t	top	173	2/3
b	bottom	4.2	−1/3

Статистика Больцмана

a	*b*	
b	*a*	
	a	*b*
	b	*a*
a		*b*
b		*a*
ab		
	ab	
		ab

Статистика Бозе-Эйнштейна

•	•	
	•	•
•		•
••		
	••	
		••

Статистика Ферми-Дирака

•	•	
	•	•
•		•

Распределения «классических» частиц

Каноническое распределение Гиббса

$$dN = A\exp(-H/kT)d^3x_1..d^3x_N d^3p_1..d^3p_N$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + U(x_1, x_2, \dots, x_{3N})$$

Для идеального газа

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{p_i^2}{2m_i} + U(x_i) \right\}$$

Распределение Максвелла

$$dN_M(\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}) = A\exp(-E_{кин}/kT)dp_x dp_y dp_z$$

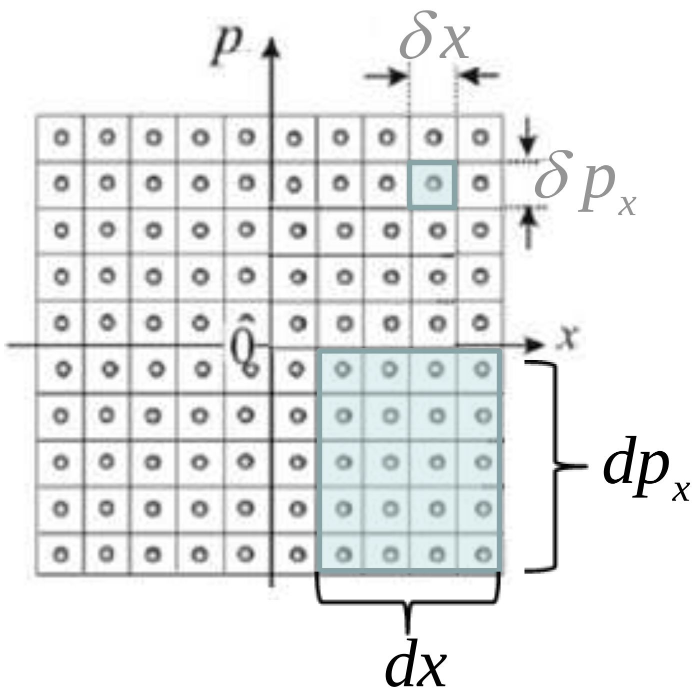
Распределение Больцмана

$$dN_Б(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r}) = A'\exp(-U(\vec{r})/kT)dxdydz$$

Фазовое пространство

В фазовом пространстве с координатами (x, y, z, p_x, p_y, p_z)
квантовому состоянию частицы соответствует фазовая ячейка объемом

$$\delta\Phi = \delta x \delta y \delta z \delta p_x \delta p_y \delta p_z = h^3 = (2\pi\hbar)^3$$



Число квантовых состояний dZ
в объеме фазового пространства

$$d\Phi = dxdydzdp_x dp_y dp_z$$

$$dZ = (2S+1)\frac{dxdydzdp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3}$$

$2S+1-$ *кратность вырождения по спину*

Число частиц
с энергией E_i

$$dN = \langle n_i \rangle dZ$$

где <n_i> среднее число частиц
в ячейке с энергией E_i

Распределение частиц по фазовым ячейкам определяется функцией заполнения – равной среднему числу частиц в фазовой ячейке с энергией E_i

Частицы с полуцелым спином (фермионы) подчиняются статистике Ферми-Дирака с распределением

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT}+1} \qquad 0 \le \langle n_i \rangle \le 1 \qquad \mu > 0$$

Частицы с целым спином (бозоны) подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна с распределением

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT}-1} \qquad 0 \le \langle n_i \rangle \qquad \mu \le 0$$

μ **- химический потенциал, находится из условия нормировки**

μ **- химический потенциал находится из условия нормировки:**

$$\int dN(E) = N$$ **где** N **- полное число частиц**

(берем интеграл , т.к. уровни E_i **распределены квазинепрерывно)**

Или: $$\int \frac{dN}{N} = \int \frac{dN}{NdE} dE = \int F(E) dE = 1$$ **где**

$F(E)$ **– функция плотности вероятности распределения частиц по энергиям**

Квантовые распределения переходят в классические при малых числах заполнения

$$\langle n_i \rangle << 1 \quad \Rightarrow \quad e^{(E_i - \mu)/kT} >> 1 \Rightarrow$$

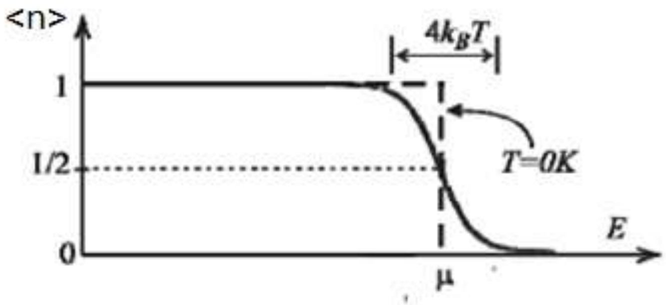
$$\langle n_i \rangle \approx \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/kT}} = Ae^{-E_i/kT} \qquad A = e^{\mu_i/kT}$$

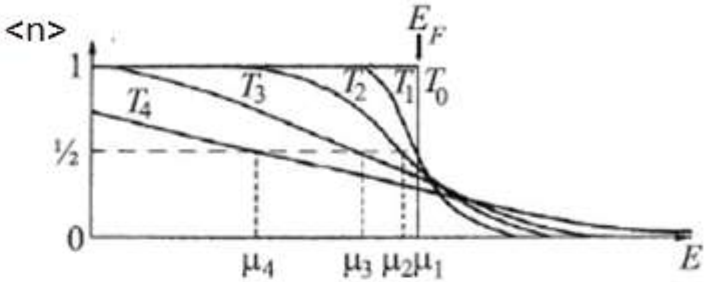
Распределения Ферми-Дирака

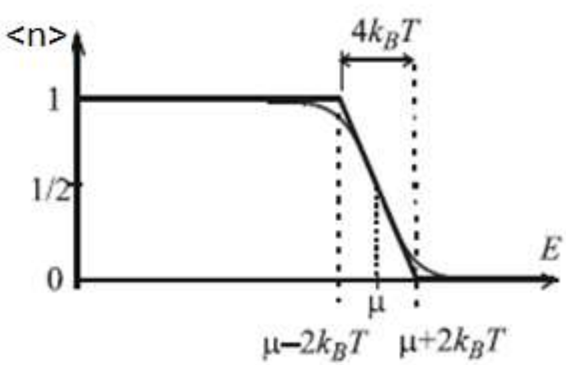
$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT}+1}$$

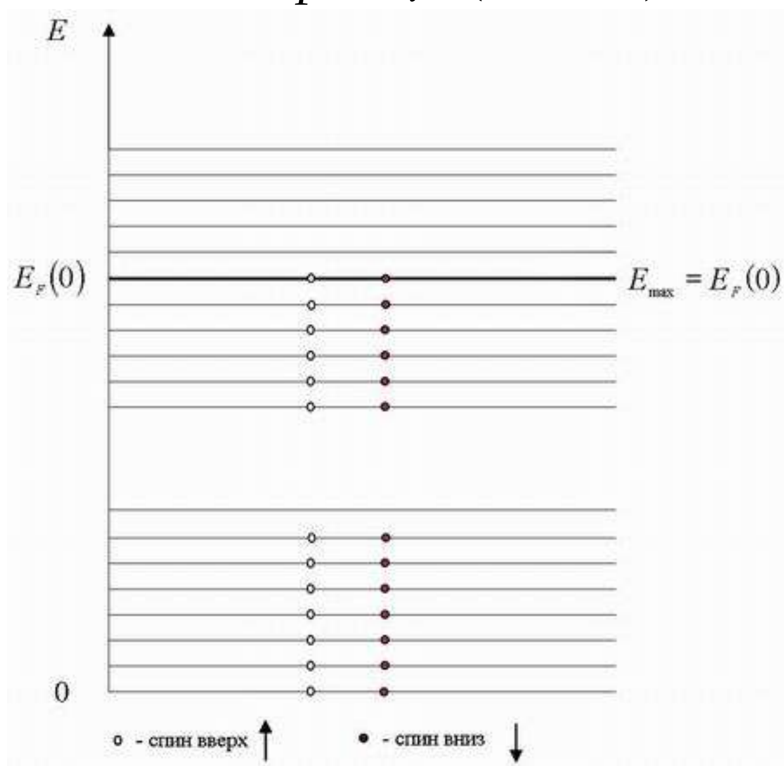
$$\langle n_i(E=\mu) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$E_F = \mu(T=0)$$



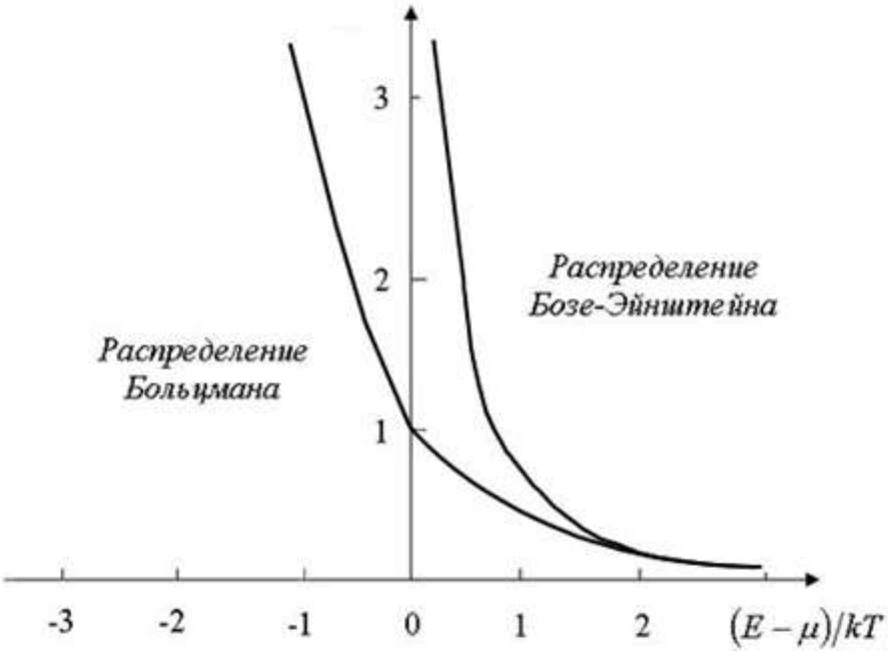


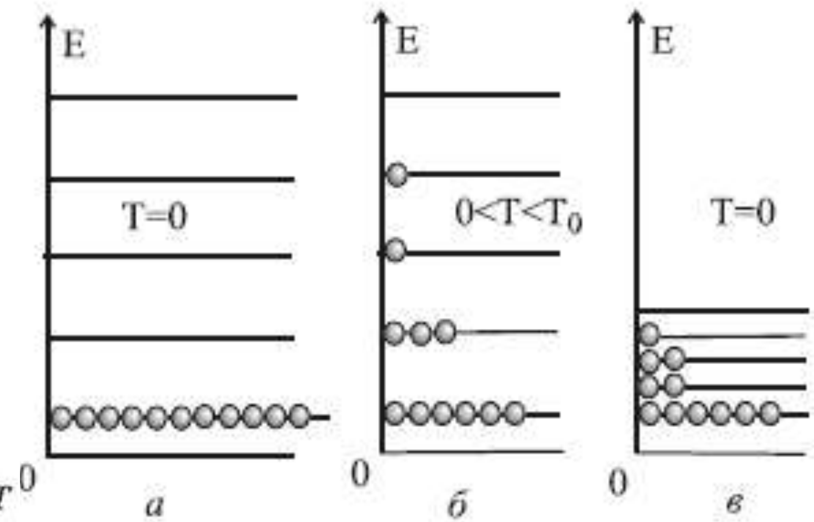




Распределения Бозе -Эйнштейна

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/kT}-1} \qquad \mu \le 0$$





Конденсация Бозе-Эйнштейна

${}_2^4He$

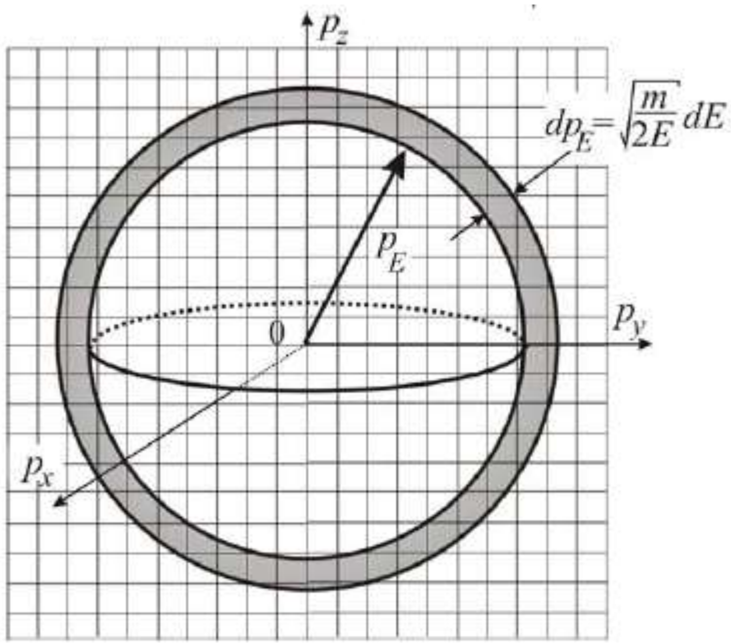
Плотность квантовых состояний

Число квантовых состояний с энергией от *E* до *E+dE*
(в единице объема *dV=dxdydz=1*)

$$dZ = (2S+1)\frac{4\pi}{h^3}p^2dp$$

Число частиц с энергией от *E* до *E+dE*

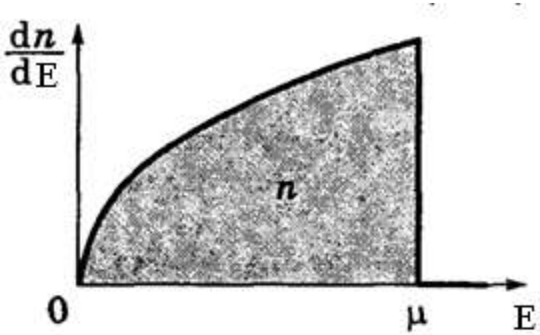
$$dn = \langle n_i \rangle dZ = \langle n_i \rangle \frac{dZ}{dE}dE = F(E)dE$$



Для электронного газа $S = 1/2$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow dp = \sqrt{\frac{m}{2E}}dE$$

$$dn = \langle n_i \rangle dZ \qquad dn = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\sqrt{E}dE$$



$$\boxed{n = \int_0^{E_F} dn \Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}}$$

$$\boxed{F(E) \sim \sqrt{E}}$$

Фотонный газ

Для фотонов 2S+1=2 из-за поперечности электромагнитной волны

$$dZ = 2\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \qquad dn = \langle n_i \rangle dZ \qquad \langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{E_i/kT} - 1}$$

$$E = \hbar\omega = cp \Rightarrow dE = cdp$$

$$dZ = 2\frac{4\pi E^2}{(2\pi\hbar)^3 c^3} dE = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Спектральная плотность энергии (для единицы объема):

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\omega dn}{d\omega} = \frac{\hbar\omega}{d\omega}\langle n_i \rangle dZ = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

Формула Планка !